

SOMBRA DE LA TIERRA Y TAMAÑO DE LA LUNA



Foto composición: Francisco J. Gálvez Fernández

RESUMEN

Para conocer el diámetro de la sombra de la Tierra a la distancia de la Luna se puede plantear un interesante problema cuya resolución solo requiere de matemáticas elementales. Además se pueden hacer estimaciones interesantes sobre el tamaño de la Luna durante un eclipse lunar en comparación con el diámetro de la sombra medido anteriormente.

CONTENIDOS

Sombra de la Tierra en un eclipse lunar: Método matemático y gráfico.

Cálculo del tamaño de la Luna. Errores y valor didáctico.

Problemas en el método de Aristarco.

NIVEL

Segundo ciclo de ESO y Bachillerato

REFERENCIAS

<https://www.astromalaga.es/2019/01/27/el-eclipse-total-de-luna-del-21-01-2018/>

Diámetro de la sombra de la Tierra a la distancia de la Luna (pdf).
Alberto Castellón Serrano.

AUTORES

Alberto Castellón Serrano (Universidad de Málaga)

Blanca Troughton Luque (Sociedad Malagueña de Astronomía)

Esteban Esteban (Asociación para la Enseñanza de la Astronomía)

Francisco J. Gálvez Fernández (Observatorio Astronómico del Torcal-Aula del Cielo)



Sombra de la Tierra en un eclipse lunar

Sobre cuál es el diámetro de la sombra de la Tierra a la distancia de la Luna se puede plantear un interesante problema cuya resolución solo requiere de matemáticas elementales. Vamos a resolver este problema para un día concreto. El día 21 de enero de 2019 tuvo lugar un eclipse total de Luna. A la hora del máximo del eclipse la Tierra se hallaba a una distancia de 0,98402276 U.A. (unidades astronómicas) del Sol, y a 0,00237063 U.A. de la Luna. La Unidad Astronómica es una medida de longitud que equivale a 149.597.870,7 Km.

Método matemático de cálculo de la sombra de la Tierra

Convirtiendo a kilómetros, el Sol estaba a 147.207.709,6 Km, y la Luna a 354.641,2 Km. Suponiendo que tanto la Tierra como el Sol son esferas perfectas, nuestro planeta proyecta una sombra con forma de cono:

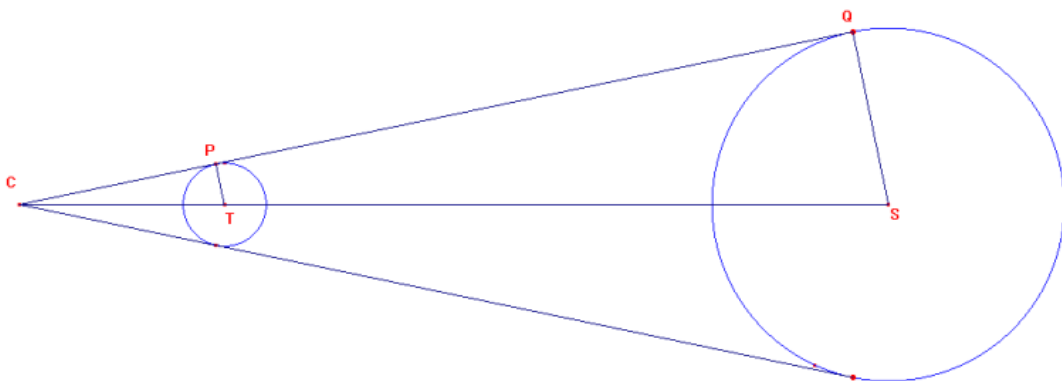


Figura 1. Sombra de la Tierra producida por el Sol

El rayo de Sol que parte del punto Q (Figura 1) pasa tangente a la Tierra hasta el vértice C del cono de sombra. Ahora hay que recordar el teorema de Thales y aplicarlo a los triángulos (C,P,T) y (C,Q,S). Según él, el radio de la Tierra PT es al radio del Sol QS como la distancia entre C y T es a la distancia entre C y S.

$$\frac{PT}{QS} = \frac{CT}{CS} \quad (1)$$

Como $CS = CT + TS$, sustituyendo y despejando CT nos queda:

$$CT = \frac{PT \cdot TS}{QS - PT} \quad (2)$$

Los radios anteriores, PT y QS, son conocidos, en concreto, la Tierra tiene un radio medio de 6.371 Km, y el Sol de 695.408 Km.

Con los datos anteriores se resuelve una sencilla ecuación obteniendo que el vértice de la sombra terrestre se halla a 1.361.117,5 Km.

Ahora basta aplicar de nuevo el teorema de Thales, pero en los triángulos (C,L,U) y (C,T,R):

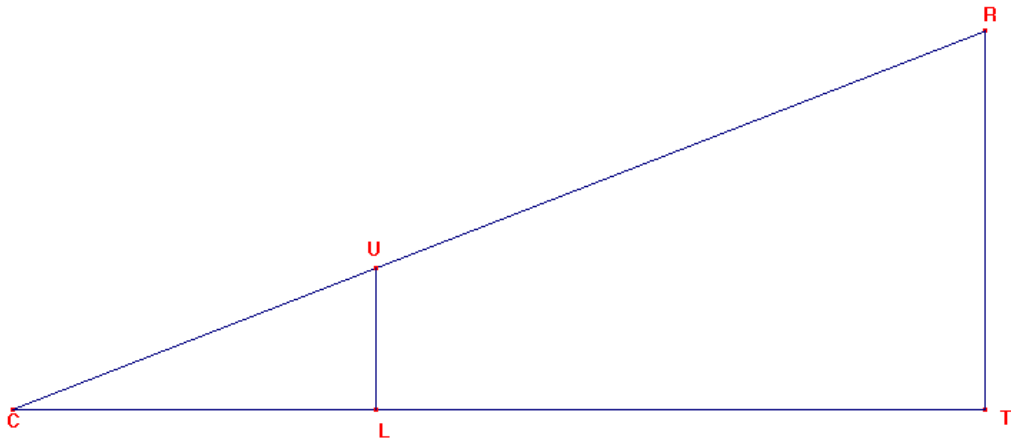


Figura 2. Radio de la sombra de la Tierra a la distancia Lunar

donde L es el centro de la Luna, y RT es el radio terrestre (Figura 2).

$$\frac{LU}{TR} = \frac{CL}{CT} \quad (3)$$

Como $CT = CL + LT$ y CT lo hemos calculado anteriormente en (2), despejando CL y sustituyendo en (3) nos queda:

$$LU = \frac{(CT - LT) \cdot TR}{CT}$$

De aquí se obtiene un radio de la sombra terrestre a la distancia lunar (distancia entre U y L) de 4.711 Km, es decir, un diámetro de 9.422 Km.

Método gráfico de cálculo de la sombra de la Tierra

Este método se basa en obtener fotografías de la evolución del eclipse antes y después de que la Luna entre totalmente en la sombra que produce la Tierra.

Para aplicar este método hay que conocer el método gráfico de la determinación del centro de una circunferencia que pasa por tres puntos.

Lo describimos aquí:

Se seleccionan tres puntos, A, B y C de una circunferencia (mejor si están bien separados unos de otros) y desde A trazamos un arco con radio mayor a la distancia AB. Con el mismo radio trazamos otro arco desde B. Dibujamos la recta que pasa por los puntos de corte de ambos arcos. Esa recta es la mediatriz del segmento AB, es decir, el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de A y de B. Análogamente lo hacemos para los puntos B y C y obtendremos la mediatriz del segmento BC, es decir, el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de B y de C. El punto donde se cortan las dos mediatrices será el centro de la circunferencia, pues está a igual distancia de los puntos A, B y C y por tres puntos sólo pasa una circunferencia.

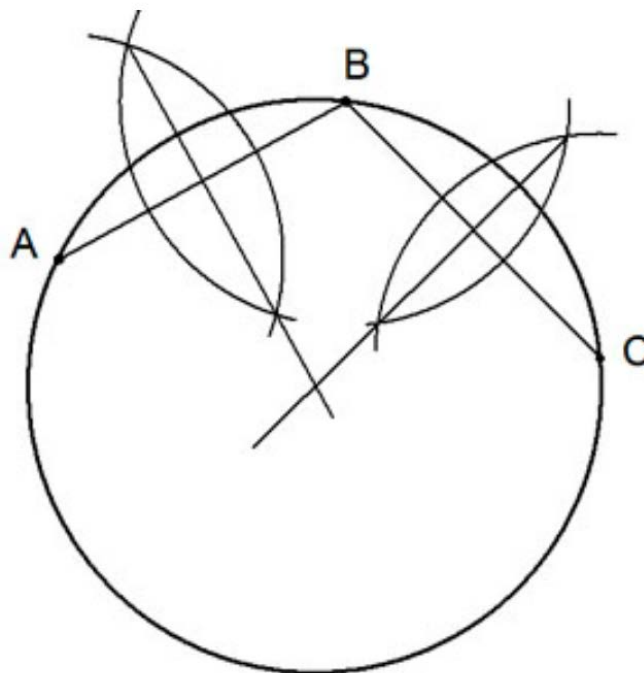


Figura 3. Trazado de circunferencia que pasa por tres puntos
(<https://www.profesordedibujo.com/geometria-plana/circunferencia/>)

Una vez obtenido el centro se puede medir con una regla perfectamente el diámetro de la circunferencia.

Veamos cómo se hizo el día del eclipse total de Luna citado en el apartado anterior. El día del eclipse, Francisco Gálvez (SMA, Aula del Cielo y OAT) realizó un completo seguimiento del eclipse obteniendo la siguiente composición fotográfica resaltando el borde hipotético de la sombra de la Tierra, cuyo objeto es el de dar una idea de la sombra de la Tierra por la que pasa la Luna.



Figura 4. Foto composición: Francisco J. Gálvez Fernández

Sobre el papel determinamos el centro de las circunferencias que representan a la sombra de la Tierra y a la Luna y determinamos el diámetro de cada circunferencia.

Sea D_S el diámetro de la circunferencia de la sombra de la Tierra sobre el papel y D_L el diámetro de la circunferencia de la sombra de la Luna sobre el papel, como el diámetro de la Luna es de 3.468,3 km, mediante una simple regla de tres obtenemos el diámetro de la sombra de la Tierra en la realidad.

$$\frac{D_{L \text{ real}}}{D_{S \text{ real}}} = \frac{D_{L \text{ fotografía}}}{D_{S \text{ fotografía}}}$$

Al medir los respectivos diámetros en la fotografía se obtienen los resultados:

$$D_{L \text{ fotografía}} = 3,5 \text{ cm}$$

$$D_{S \text{ fotografía}} = 10 \text{ cm}$$

De donde, despejando $D_{S\text{ real}}$ y sustituyendo, se obtiene: $D_{S\text{ real}} = 9.909\text{ km}$

Comparado con el dato obtenido matemáticamente supone un error del 5%, que no está mal, dado que los hemos hecho con una regla.

Cálculo del tamaño de la Luna

Para calcular el tamaño de la Luna se utilizaba una sombra: la de nuestro planeta sobre la superficie de la Luna durante un eclipse de Luna calculada anteriormente. Para tomar los datos hay que hacerlo antes o después de esta fase, durante el eclipse parcial.

Se propone seguir líneas similares a las que históricamente utilizó para medirlo Aristarco de Samos en el siglo III A.C., aunque en este caso se utilizará la fotografía, que evidentemente no estaba en las manos del sabio griego y nos permitirá solucionar algunos inconvenientes importantes con los que él se encontró.

De hecho el método de Aristarco en principio parece correcto pero tiene algunas pegas, como el suponer que la sombra de la Tierra es cilíndrica (al menos tal como se narra en muchas publicaciones), que no afecta excesivamente al resultado porque solo se trataba de una estimación, y como tal es válido, pero hay que señalarlo en una explicación didáctica.

Parece ser que Aristarco lo hizo utilizando los tiempos en que la Luna tardaba en entrar totalmente en la sombra de la Tierra y lo que tardaba en atravesar toda la sombra. Pero este método no es válido en cualquier eclipse porque cambia mucho de unos a otros según la trayectoria y la profundidad del camino que siga la Luna, y habría que tomar el de mayor duración. Se propone utilizar una fotografía que siempre servirá.

En la composición fotográfica anterior (Figura 4) se mide y calcula la proporción del tamaño de los dos círculos (el de la sombra de la Tierra y el de la Luna). Obtuvimos unos diámetros de 10 cm y 3,5 cm respectivamente. Dividiendo: $10/3.5=2.86$

Esta sería la proporción entre el tamaño de la Tierra (ya calculado en la actividad “Tamaño de la Tierra”, B. Troughton, E. Esteban) y el de la Luna, suponiendo que la sombra de nuestro planeta mantuviera el tamaño de éste (fuese un cilindro). Lógicamente no es así porque la luz que produce esa sombra por el Sol es mucho más grande (y por ello es un cono) ¡Pero también está muy lejos! ¿Es un cono muy puntiagudo, o no?

Hay una manera de saber aproximadamente en cuanto se reduce esa sombra de la Tierra a la distancia de la Luna, que se deduce del hecho de que vista la Luna desde

aquí tiene un tamaño angular igual al Sol, o que en un eclipse solar el cono de sombra de la Luna prácticamente tiene su vértice en la superficie terrestre. A veces un poco más o un poco menos y por eso hay eclipses anulares y totales.

En el siguiente gráfico se ilustra:

Como el Sol está mucho más lejos que la Tierra (y que la Luna) las líneas que delimitan los conos de sombra (en el gráfico, L) de ambos astros son casi paralelas, y por ello la reducción del diámetro de la sombra de la Tierra cuando hay un eclipse es el doble del radio lunar ($2r$) como se puede apreciar en la figura 5.

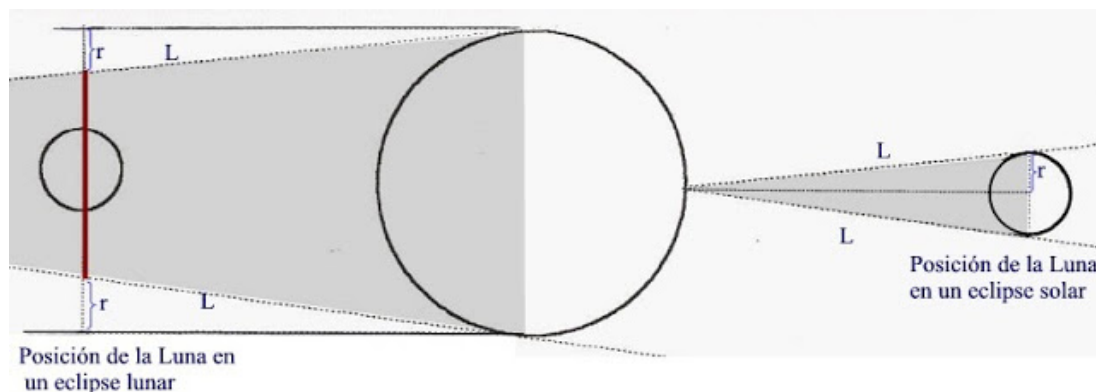


Figura 5. Conos de sombra de la Tierra y la Luna

Siguiendo con los cálculos anteriores, a esa escala la Tierra tendría un diámetro de $10+3.5=13.5$ y $13.5/3.5=3.86$.

La Tierra es 3.86 veces más grande que la Luna, y tomando el valor del radio terrestre, 6371 km, sale un radio lunar de $6371/3.86 = 1650$ km. El valor verdadero es de 1737 km por lo que el error es de un 5%.

De todas formas, incluso haciendo todo el método de manera exacta puede haber un error mayor.

Errores y valor didáctico relativos al cálculo del tamaño de la Luna

Cuando se plantean estas experiencias didácticas siempre hay alguien que opina que no tiene sentido tanto cálculo. Que si queremos saber cuánto mide la Tierra y la Luna lo podemos mirar en un momento en internet y nos ahorramos el trabajo. O una vez acabado el cálculo critica el que el resultado no sea exacto.

Evidentemente el objetivo no es obtener un resultado, sino aprender el método, conseguir llevarlo a cabo, motivar e incluso, si el valor obtenido es muy incorrecto, analizar qué hemos hecho mal y solucionarlo, porque se aprende mucho más de los errores.

Por otra parte hay que señalar que estos métodos no tienen por qué ser exactos aunque hagamos correctamente las operaciones matemáticas, y muchas veces el propio método lleva implícito un posible error que no se puede evitar.

En este caso el factor más determinante es la distancia a la que se encuentre la Luna en el momento del eclipse. Debido al movimiento en su órbita nuestro satélite puede estar hasta un 7% más lejos o más cerca de la media. Es la circunstancia de la que tanto se habla con las “superlunas”.

Además la determinación exacta del borde de la sombra y el completar la circunferencia que se ajusta a ella no es fácil hacerlo con precisión.

Problemas en el método de Aristarco

En el cálculo del tamaño de la Luna por Aristarco aunque hay relatos y explicaciones muy detalladas y completas, en algunos lugares se supone que la sombra de la Tierra era casi cilíndrica y se miden los tiempos en que la Luna pasaba de la posición 1 a la 2 y de la 1 a la 3.



Figura 6. Pasos en un eclipse total de Luna: Inicio de la parcialidad a final de la totalidad

El punto 1 es cuando comienza el eclipse parcial, el 2 cuando comienza el total y el 3 cuando acaba el total (Figura 6). El paso de 1 a 2 es proporcional al tamaño de la Luna y el paso de 1 a 3 es proporcional al tamaño de la Tierra.

No es problema el aproximar la sombra por un cilindro, que didácticamente no es importante para entender el método, pero sí que se den unas medidas muy diferentes de las reales.

A veces se dice que “Aristarco comprobó que la Luna tardaba 4 veces más en pasar de 1 a 3 que de 1 a 2, con lo que aproximadamente su tamaño es la cuarta parte”

La conclusión sabemos que es cierta (no es muy diferente 4 o el valor real 3.7) pero en ningún eclipse tardará más de 2.7 veces más de 1 a 3. Se cambian los números para compensar el error en el diseño.

En otros casos se hace un planteamiento correcto con los conos de sombra pero se habla de que Aristarco tomó los tiempos “en un eclipse” sin más. Pero los datos van a ser muy diferentes según el eclipse que se tome.

Debería ser un eclipse en que la Luna atravesara el cono de sombra de plano (como el de julio de 1953) y no casi rasante (como el de enero de 2019). Los tiempos son muy diferentes y sería mucha casualidad que hubiera tomado precisamente un eclipse adecuado, que es probable que en toda su vida no ocurriera ninguno. Con el método de la fotografía del eclipse parcial no surge este problema.

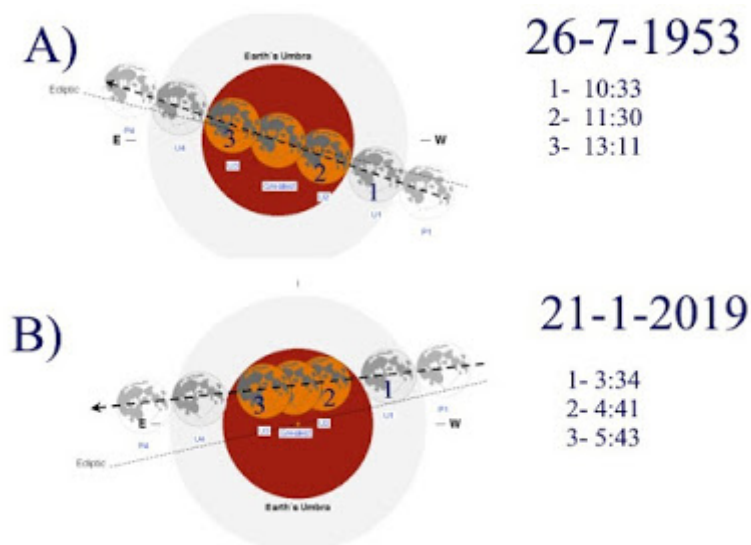


Figura 7. En el caso A) la relación de tiempos (paso de 1 a 3 respecto al paso de 1 a 2) es de 2.7 y en el B) es de 1.9

De todas formas también es posible que tanto Eratóstenes como Aristarco obtuvieran los resultados exactos, pero no es probable, ni es importante en absoluto. Lo realmente importante es que se plantearon la posibilidad de obtener esas medidas, que idearon unos métodos para calcularlas y aproximadamente obtuvieron el orden de esos tamaños, lo que supuso un gran avance en el conocimiento de la época.

Investiga

Cráteres de mujeres en la Luna

Haz un listado de todos los cráteres de la Luna con nombres de mujer. Haz una clasificación por sus profesiones y distingue los cráteres de la cara visible de la Luna de los de cara oculta. Localízalos en un mapa de la Luna.

Maria Clara Eimmart hizo unos magníficos dibujos de la superficie lunar, averigua donde vivía y los trabajos que realizó y dónde están expuestos sus dibujos.

Mary Adela Blagg fue la compiladora del nomenclator lunar que adoptó la Unión Astronómica Internacional. Investiga sobre su vida y sus trabajos en astronomía.

Material adicional

A partir de los cálculos matemáticos anteriores hay varias formas de deducir el radio de la Luna. Deducción del radio de la Luna ideado por Hiparcos:

<http://19e37.com/blog/como-supimos-la-distancia-tierra-luna/>

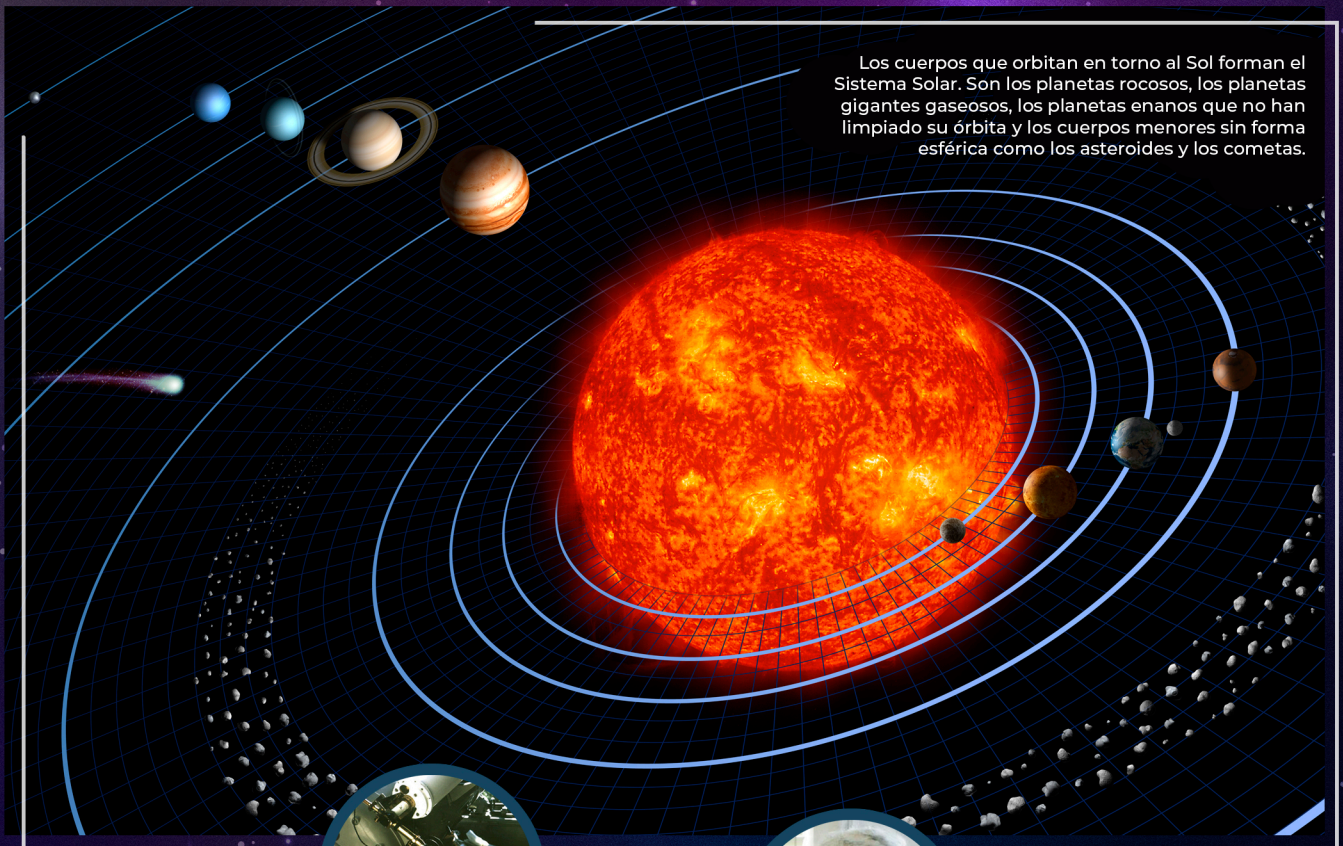
“La Luna vista por Eimmart”, Blanca Troughton

<https://www.youtube.com/watch?v=njOIJHX0dwY>

Exposición de Astrónomas: <https://www.astronomas.org>



BIEN ACOMPASADOS



Los cuerpos que orbitan en torno al Sol forman el Sistema Solar. Son los planetas rocosos, los planetas gigantes gaseosos, los planetas enanos que no han limpiado su órbita y los cuerpos menores sin forma esférica como los asteroides y los cometas.

**CAROLYN JEAN
SPELLMANN
SHOEMAKER**
CAZADORA DE COMETAS



Desde el Observatorio de Monte Palomar codescubrió en 1993 el cometa Shoemaker-Levy, primer cometa observado que giraba en torno a Júpiter y no al Sol. Ostentó el récord de cometas descubiertos en solitario o junto a otras personas, con 32 cometas y más de 800 asteroides.

**ANGIOLETTA
CORADINI**
EXPERTA MUNDIAL
EN CIENCIAS
PLANETARIAS



Durante los años setenta del siglo XX trabajó con muestras lunares de las misiones Apolo en el Instituto del Consejo Nacional de Investigación de Italia. Lideró el equipo italiano para el canal visual del espectrómetro Cassini VIMS.

IMKE DE PATER
OBSERVA A LOS
GIGANTES EN INFRARROJO



Catedrática de Astronomía de la Universidad de California en Berkeley. Realiza observaciones de planetas gigantes en infrarrojo utilizando óptica adaptativa en los telescopios Keck, Gemini y VLT y en longitudes de onda de radio, usando los complejos de radiotelescopios VLA, ALMA y LOFAR.

OLGA MUÑOZ
DESVELANDO EL
POLVO CÓSMICO



Investigadora del Instituto de Astrofísica de Andalucía-CSIC, lidera el Laboratorio de polvo cósmico para caracterizar las partículas que provienen del espacio y participa en las misiones Rosetta y Comet Interceptor de la Agencia Espacial Europea. Estudia las etapas iniciales de formación de materia protoplanetaria en microgravedad en el proyecto ICAPS.



ASTRÓNOMAS

PATROCINADORES



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE CIENCIA
E INNOVACIÓN

FECYT
INNOVACIÓN

USC
UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

SEA



IFS
CSIC



ICCUB

UNED

Universidad
de Alcalá

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

UNIVERSITAT
DE VALÈNCIA